حد و پیوستگی

مفهوم حد در ریاضی را می‌توان با این مثال توضیح داد: رشته عددهای ۱, ۲/۱, ۴/۱, ۸/۱,... اگر به همین حالت ادامه یابند همواره به صفر نزدیک‌تر می‌شوند ولی هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسند بنابر این اصطلاحا می‌گوییم که صفر **حَدّ** این رشته عدد است.

به عبارتی، وقتی که مقادیر متوالی به یک متغیر نسبت داده می‌شود، و درنتیجه بی نهایت به عدد ثابتی نزدیک شوند، به طوری که اختلاف آنها از مقدار ثابت به هر اندازه کوچک قابل انتخاب باشد، این مقدار ثابت را حد همه مقادیر متغیر می‌گویند.

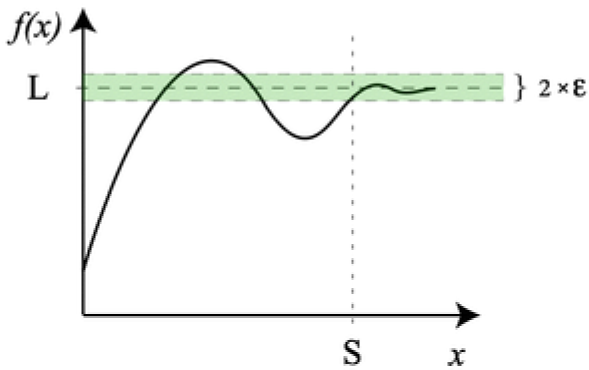
کاربرد مفهوم **حد** در ریاضی در توصیف مقداری است که یک تابع یا دنباله به آن نزدیک می‌شود، هنگامی که ورودی آن تابع یا شمارندهٔ آن دنباله به یک مقدار مشخص نزدیک می‌شود.[۱] حد یک مفهوم اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال و در حالت کلی در آنالیز ریاضی است و در تعریف پیوستگی، مشتق و انتگرال کاربرد دارد. موضوع حد، به منظور بیان رفتار یک تابع می‌پردازد و می‌تواند رفتار آن را در نقاط روی صفحه و یا در بی نهایت هم ارزیابی کند.

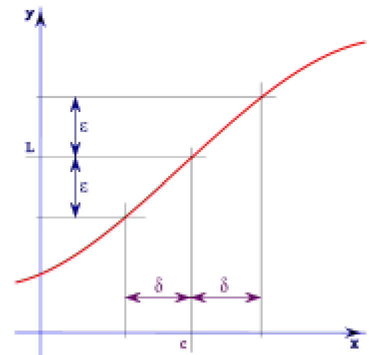
مفهوم حد یک دنباله به حالت کلی تر حد شبکهٔ مکان‌شناسی گسترش می‌یابد و ارتباط نزدیکی با حد و حد مستقیم در نظریهٔ رده‌ها دارد.

ریاضی‌دانان پیش از آنکه مفهوم دقیق تر حد را ارائه کنند، در مورد آن مجادله‌های بسیار کرده‌اند. یونانی‌ها در عصر باستان درکی از مفهوم حد داشته‌اند. برای نمونه ارشمیدس مقدار تقریبی را با استفاده از پیرامون چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره به شعاع یک، وقتی که تعداد اضلاع بدون کران افزایش می‌یابد به دست می‌آورد. در قرون وسطی نیز تا دورهٔ رنسانس مفهوم حد برای بدست آوردن مساحت شکل‌های گوناگون بکار گرفته می‌شد.[۲]

در نوشتار ریاضی حد را گاهی به صورت **lim** نمایش می‌دهند مانند $\lim(a_n) = a$، گاهی با یک پیکان رو به راست (⟶) نمایش می‌دهند مانند: $a_n \to a$ و گاهی هم به فارسی حد می‌نویسند.

حد تابع





فرض کنید $f(x)$ تابعی حقیقی و c عددی حقیقی باشد. عبارت

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

بدین معنا است که اگر x به‌اندازهٔ کافی به c نزدیک شود مقدار $f(x)$ به‌اندازهٔ دلخواه به L نزدیک خواهد شد. رابطهٔ ریاضی بالا را چنین می‌خوانیم: «حد f از x هنگامی که x به c نزدیک می‌شود برابر L است.»

کوشی در ۱۸۲۱ و به دنبال او کارل وایراشتراس تعریفی که در بالا برای حد داده شد را ریاضی وار بیان کردند، این تعریف در سدهٔ ۱۹ میلادی با نام «تعریف (ε, δ) حد» شناخته شد. آن‌ها در این تعریف از اپسیلون، ε، برای نشان دادن یک مقدار مثبت بسیار کوچک بهره بردند. هنگامی که «$f(x)$ به‌اندازهٔ دلخواه به L نزدیک می‌شود» به این معنی است که مقدار $f(x)$ کم کم در بازهٔ $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ جای می‌گیرد. با کمک قدر مطلق چنین می‌نویسیم: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

عبارت «هنگامی که x به‌اندازهٔ کافی به c نزدیک می‌شود» به این معنی است که مقدارهای حقیقی از x را در نظر داریم که فاصلهٔ آن‌ها از c کمتر از عدد مثبت دلتا، δ باشد. یعنی x عضو یکی از دو بازهٔ $(c - \delta, c)$ یا $(c, c + \delta)$ است، نوشتار ریاضی این عبارت چنین است: $0 < |x - c| < \delta$. نامساوی نخست یعنی فاصلهٔ میان c و x بیشتر از صفر است و $x \neq c$ است در حالی که نامساوی دوم می‌گوید فاصلهٔ x از c کمتر از δ است.

توجه داشته باشید که تعریف بالا برای حد می‌تواند درست باشد حتی اگر $f(c) \neq L$ باشد. در حقیقت حتی نیازی نیست که f(x) در c تعریف شده باشد.

برای نمونه اگر داشته باشیم:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

آنگاه f(1) تعریف نشده‌است (بخش بر صفر) حال هر چه x به ۱ نزدیک می‌شود، f(x) متناسب با آن نیز به ۲ نزدیک می‌شود:

f(۰/۹)	f(۰/۹۹)	f(۰/۹۹۹)	f(۱/۰)	f(۱/۰۰۱)	f(۱/۰۱)	f(۱/۱)
۱/۹۰۰	۱/۹۹۰	۱/۹۹۹	⇒ تعریف نشده ⇐	۲/۰۰۱	۲/۰۱۰	۲/۱۰۰

بنابراین، مقدار f(x) به ۲ نزدیک می‌شود هرگاه بتوانیم x را به‌اندازهٔ کافی به ۱ نزدیک کنیم.

به عبارت دیگر

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

یک تابع علاوه بر داشتن حد در مقدارهای معین، می‌تواند در بی نهایت هم دارای حد باشد. برای نمونه:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x}$$

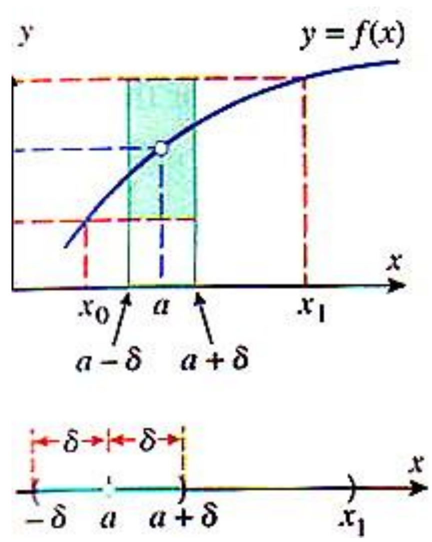
- f(۱۰۰) = ۱/۹۹۰۰
- f(۱۰۰۰) = ۱/۹۹۹۰
- f(۱۰۰۰۰) = ۱/۹۹۹۹۰

هرگاه x مقدارهای بی نهایت بزرگ به خود گیرد، مقدار f(x) به سوی ۲ کشیده می‌شود. در این حالت می‌گوییم حد f(x) به ازای xهای رو به بی نهایت، برابر ۲ است. بیان ریاضی این گفته چنین است:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = 2.$$

اثبات وجود حد

روش **اثبات اپسیلون و دلتا** مشهور است که بار اول توسط ریاضیدان آلمانی کارل ویستراس عنوان شد. با استفاده از آن حد را چنین تعریف می‌کنیم:



گوییم $f(x)$ در نقطه‌ای مانند x_0 دارای حد L است اگر به ازای هر عدد مثبت ϵ عدد مثبتی مثل δ موجود باشد به طوری که اگر $0 < |x - x_0| < \delta$، آنگاه $|f(x) - L| < \epsilon$.

به عبارت دیگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد، که برای هر x_0 با خاصیت $|x - x_0| < \delta$، داشته باشیم $|f(x) - L| < \varepsilon$.

برای تعریف غیرصوری باید گفت حد تابع $f(x)$، L است اگر وقتی $x \to a$، $f(x)$ به حد L نزدیک بشود، یا $f(x)$ در a دارای حد L است، اگر هنگامی که x به a میل می‌کند، $f(x)$ به L نزدیک شود.

مثال برای بحث اثبات وجود حد

اثبات $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$:

برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود دارد به شکلی که:

$|\sqrt{x}-0|<\varepsilon$ اگر $0<x<\delta$

یا $\sqrt{x}<\varepsilon$ اگر $0<x<\delta$

با گرفتن جذر هر دو سمت می‌توانیم عبارت قبلی را به شکل زیر بنوسیم:

$\sqrt{x}<\epsilon^2$ اگر $0<x<\delta$

بنا بر این $\delta\leq\epsilon^2$

و این $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ را اثبات می‌کند.

مفهوم حد یک دنباله

دنبالهٔ روبرو را در نظر بگیرید: ۱/۷۹, ۱/۷۹۹, ۱/۷۹۹۹,... می‌توان دریافت که اعداد این دنباله به عدد ۱/۸ نزدیک می‌شوند. ۱/۸ حد این دنباله‌است.

فرض کنید ... a1, a2, دنباله‌ای از عددهای حقیقی است. آنگاه می‌توان گفت عدد حقیقی L حد این دنباله‌است هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=L$$

یعنی:

به ازای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ می‌توان یک عدد طبیعی n. پیدا کرد به گونه‌ای که برای تمام $n > n$. آنگاه .

عبارت بالا بدان معنا است که همهٔ عضوهای دنباله به حد دنباله نزدیک می‌شوند چون عبارت قدر مطلقی برابر است با فاصلهٔ میان a_n و L. همهٔ دنباله‌ها دارای حد نیستند، اگر دنباله‌ای حد داشت به آن *همگرا* و اگر نداشت *واگرا* می‌گوییم. می‌توان نشان داد که دنباله‌های همگرا، حد یکتا دارند.

حد یک دنباله و حد یک تابع رابطهٔ نزدیکی با هم دارند.

حد و پیوستگی

نوشته شده در تاریخ سه شنبه 22 تیر 1389 توسط علی .ک

در ریاضیات، مفهوم حد، برای بیان رفتار یک تابع مورد استفاده قرار می گیرد و به بررسی این رفتار در نقاط روی صفحه و یا در بی نهایت می پردازد. حد در حساب دیفرانسیل و انتگرال و نیز در آنالیز ریاضی برای تعریف مشتق و نیز مفهوم پیوستگی مورد استفاده قرار می گیرد .

ریاضیدانها حتی قبل از اینکه بتوانند مفهوم دقیق حد را بیان کنند، در مورد آن بحث می کرده اند. یونانیان باستان درکی از مفهوم حد داشته اند. مثلاً ارشمیدس مقدار تقریبی را با استفاده از محیط چند ضلعیهای منتظم محاط در دایره به شعاع واحد، وقتی که تعداد اضلاع بدون کران افزایش می یابد به دست می آورد. در قرون وسطی نیز تا زمان رنسانس انواع مفاهیم حد برای بدست آوردن مساحت شکلهای مختلف به کار رفته است .

نیوتن و لایب نیتس در قرن هفدهم، درک شهودی خوبی از حد داشته و حتی حدهای پیچیده ای را نیز محاسبه کرده اند. اما نه آنها و نه در آن قرن، دانشمندان دیگر تعریف دقیقی از حد را ارائه نکرده اند .

یک قرن پس از پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال، آلمبرت در سال 1754 عنوان کرد که پایه منطقی مباحث این رشته از دانش بشری مفهوم حداست .کوشی در اوایل قرن نوزدهم حساب دیفرانسیل و انتگرال را به شکلی شبیه آنچه در حال حاضر می خوانیم ارائه داد :

"وقتی که مقادیر متوالی به یک متغیر نسبت داده می شود، بی نهایت به عدد ثابتی نزدیک شوند، به طوری که اختلاف آنها از مقدار ثابت به هر اندازه کوچک قابل انتخاب باشد، این مقدار ثابت را حد همه مقادیر متغیر می گویند".

تعریف حد

مقدار ثابت a حد متغیر x است هرگاه به ازای هر عدد مثبت کوچک ϵ که قبلا به طور مشخص تعیین گردیده است بتوان مقداری از متغیر x را چنان تعیین کرد که جمیع مقادیر در نامساوی $|x-a|<\epsilon$ صدق کند . اگر a حد متغیر x باشد گوییم متغیر x به سوی حد a میل می‌کند و بر حسب قرداد آن را به یکی از صورتهای زیر می‌نویسیم:

$$x \to a, \lim x = a$$

تعبیر هندسی حد

مقدار ثابت a حد متغیر x است (یعنی L=a) هرگاه برای هر همسایگی کوچک که مرکز آن a و شعاع آن $\epsilon > 0$ و $\delta > 0$ است و این همسایگی قبلا بطور غیر مشخصی تعیین گردیده است مقداری از x را چنان تعیین نمود که جمیع نقاط متناظر به مقادیر بعدی متغیر در داخل این فاصله قرار گیرند .

خواص حد

- مقدار ثابت c متغیری است که جمیع مقادیر آن بر یکدیگر منطبق است یعنی x=c. واضح است که حد مقدار ثابت c برابر c است زیرا همواره برای هر عدد مثبت و دلخواه ϵ نامساوی زیر برقرار است :

$$|x-c| = |c-c| = 0 < \epsilon$$

- از تعریف حد نتیجه می‌گردد که متغیر نمی‌تواند دارای دو حد باشد زیرا اگر $\lim x = a$ و $\lim x = b$ باشد $a < b$ در این صورت متغیر x باید در یک زمان در دو نامساوی $|x-a| < \epsilon$ و $|x-b| < \epsilon$ صدق کند. ولی اگر $\epsilon < \frac{b-a}{2}$ باشد خواهیم دید که این امر امکان ندارد .
- نباید تصور نمود که هر متغیر دارای حد می‌باشد .

حد یک تابع

فرض می‌کنیم تابع $y = f(x)$ در همسایگی معینی از نقطه a و یا در برخی نقاط این همسایگی معین باشد. اگر x به سوی a میل کند $(x \to a$ تابع $y = f(x)$ به سوی حد b میل خواهد نمود، هرگاه به ازای هر

ϵ عدد مثبت کوچک بتوان عدد مثبتی مانند δ غیر از a یافت به قسمی که جمیع مقادیر x که در نامساوی $|x-b|<\delta$ صدق می‌کنند در نامساوی $|f(x)-b|<\epsilon$ نیز صدق کنند .

اگر b حد تابع $y=f(x)$ هنگامیکه $x\to a$ باشد در اینصورت خواهیم نوشت :

$\lim_{a\to a} f(x)=b, x\to a, f(x)\to b$

قضایایی درباره حد

- اگر m و b و a سه عدد دلخواه باشند و $y=f(x)=mx+b$ ، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)=ma+b$$

- **قضیه حد مجموع :** حد مجموع دو تابع برابر مجموع حدهای آن دوتابع است، مشروط بر اینکه حدها وجود داشته باشند .
- **قضیه حد حاصلضرب :** حد حاصلضرب دو تابع مساوی حاصلضرب حدهای آنهاست، مشروط بر اینکه حدها وجود داشته باشند .
- **قضیه حد تفاضل :** حد تفاضل دو تابع مساوی تفاضل حدهای آن دو تابع است، مشروط بر اینکه حدها وجود داشته باشد .
- حد حاصلضرب یک عدد ثابت در یک تابع ، برابر است با حاصلضرب آن عدد ثابت در حد آن تابع .
- حد خارج قسمت دو تابع ، خارج قسمت حدهای آنهاست به شرطی که مخرج به صفر نگراید .

این ویژگیها برای حدهای راست و برای حدهای چپ نیز صادق است .

- اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $L\neq 0$ ، آنگاه :

$$\lim_{x}\to a\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{L}$$

- اگر f و g به ازای جمیع مقادیر x در نامساوی $f(x)\leq g(x)$ صدق کنند. اگر f و g در x=a حد داشته باشند، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)\leq \lim_{x\to a} g(x)$$

- **قضیه حد تابع مرکب :** اگر تابع g در x_0 دارای حد a و تابع f در a دارای حد A باشد. به علاوه ، اگر در همسایگی از x_0 داشته باشیم $g(x) \leq a$ ، آنگاه تابع مرکب fog در x_0 دارای حد A است .

حد در بی‌نهایت

- تابع f و عدد L مفروض‌اند. اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ باشد، آنگاه L را حد تابع f ، وقتی x به سمت بی‌نهایت مثبت میل می‌کند، می‌گویند .
- تابع f و عدد L مفروض‌اند. اگر $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ باشد، آنگاه ، Lرا حد تابع f ، وقتی x به سمت بی‌نهایت منفی میل می کند، می‌گویند .
- تابع f و عدد L مفروض‌اند. اگر $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ باشد، آنگاه ، Lرا حد تابع f ، وقتی x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، می‌گویند .

حدهایی که بی‌نهایت می‌شوند

- برای تابع مفروض f ، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ باشد، آنگاه ، حد تابع f را ، وقتی x به سمت a میل کند، بی‌نهایت مثبت می‌نامیم .

در این حالت نمی‌توان گفت f در x=a حد دارد، زیرا مثبت بی‌نهایت یک عدد حقیقی نیست .

- برای تابع مفروض f ، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ باشد، آنگاه ، حد تابع f را ، وقتی x به سمت a میل کند، بی‌نهایت منفی می‌نامیم. در این حالت نمی‌توان گفت f در x=a حد دارد، زیرا منفی بی‌نهایت یک عدد حقیقی نیست .

تعریف پیوستگی

تابع f را در x=a پیوسته می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد :

1. تابع f در نقطه a وجود داشته باشد، یعنی a تعلق به دامنه f باشد .
2. حد تابع $f(a)$ در نقطه a وجود داشته باشد .

3. حد تابع $f(x)$ در نقطه x=a برابر $f(a)$ باشد .

اگر هر یک از سه شرط بالا در x=a برقرار نباشد، fرا در a ناپیوسته می‌نامیم. در این صورت a را یک نقطه ناپیوستگی f نیز می‌خوانیم .

مفهوم پیوستگی

تابعی مانند $y = f(x)$ که بتوان نمودار آن را در هر بازه‌ای از دامنه‌اش با حرکت پیوسته نوک قلم رسم کرد، مثالی از یک تابع پیوسته است. ارتفاع نمودار این تابع در طول بازه به طور پیوسته با x تغییر می‌کند. در هر نقطه داخلی دامنه تابع ، مانند c در شکل زیر ، مقدار تابع ، $f(c)$ ، حد مقادیر تابع در هر یک از دو طرف است؛ یعنی

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$$

مقدار تابع در هر نقطه انتهایی نیز ، حد مقادیر تابع در نزدیکی آن است .

در نقطه انتهایی چپ a

$$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

در نقطه انتهایی راست b

$$f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x)$$

پیوستگی در مورد اعمال جبری

اگر توابع f و g در x=a پیوسته باشند، آنگاه :

1. حاصلجمع دو تابع f و g در x=a پیوسته است .
2. تفاضل دو تابع f و g در x=a پیوسته است .
3. $cf(x)$ ، به ازای هر عدد ثابت c ، در x=a پیوسته است .
4. حاصلضرب دو تابع f و g در x=a پیوسته است .
5. خارج قسمت دو تابع یعنی $\frac{f(x)}{g(x)}$ به شرطی که $g(x) \neq 0$ در x=a پیوسته است .
6. قدرمطلق هر یک از این دو تابع در x=a پیوسته است .

ویژگیهای مهم پیوستگی

- یک چند جمله‌ای از x همواره در تمام نقاط اعداد حقیقی پیوسته خواهد بود .
- هر تابع گویا در تمام نقاط قلمرو خود پیوسته خواهد بود .
- اگر تابع f در a پیوسته باشد، آنگاه ریشه n ام $f(x)$ برای همه اعداد صحیح و مثبت n در x=a پیوسته خواهد بود .
- اگر تابع g در a و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، آنگاه ترکیب دو تابع f و g در a پیوسته خواهد بود .

پیوستگی روی بازه باز و بسته

- اگر تابع f در همه نقاط یک بازه پیوسته باشد، fرا روی آن بازه باز پیوسته می‌نامیم. اگرf حداقل در یک نقطه از بازه باز پیوسته نباشد، fرا روی این بازه باز ناپیوسته می‌نامیم .
- تابع f را روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته می‌نامیم، اگر در سه شرط زیر صدق کند :

1. fروی بازه باز (a, b) پیوسته باشد .
2. حد تابع $f(x)$ در نقطه $x = a^+$ برابر $f(a)$ باشد .
3. حد تابع $f(x)$ در نقطه $x = b^-$ برابر $f(b)$ باشد .

اگر هر یک از سه شرط بالا برقرار نباشد، fرا روی بازه بسته $[a, b]$ناپیوسته می‌نامیم .